Title	(2, 1)-ファイバー空間に対するHodge構造の変動について
Author(s)	宮岡, 洋一
Citation	代数幾何学シンポジューム記録 (1981), 1981: 120-134
Issue Date	1981
URL	http://hdl.handle.net/2433/212604
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

代数幾何学シンポジウム記録
1981年度　pp.120-134

(2,1)-ファイバー空間に対する Hodge構造の変動について

都立大・理　宮岡洋一

§1. 序

Kähler ファイバー空間 $f: X \longrightarrow Y$ を与えたとき，局所定数層 $\mathbb{C}_X$ から自然に Y 上の層 $R^if_*\mathbb{C}_X$ が定まる。この層は連接層ではないし，また各点での階数も相異る。しかし，射影 f が smooth なら，もちろん $R^if_*\mathbb{C}_X$ は Y 上の局所系 (local system) であって，自然な同型

$$R^if_*\mathbb{C}_X \underset{\mathbb{C}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_Y \cong R^if_*f^{-1}\mathcal{O}_Y$$

が存在する。ここで $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ は，各ファイバーに沿っては局所的に定数であるような Y 上の正則函数の芽からなる層であって，明らかに $\mathcal{O}_X$ の部分層である。

さて，以下しばらく $f: X \longrightarrow Y$ は smooth であると仮定し，Y の次元を n，ファイバーの

次元をnとしよう。以下の記号を導入する。

$$\Omega^1_{X/Y} = \Omega^1_X / f^*\Omega^1_Y,$$
$$\Omega^p_{X/Y} = \wedge^p \Omega^1_{X/Y} \cong \Omega^p_X / (f^*\Omega^1_Y \wedge \Omega^{p-1}_X).$$

このとき，Poincaré の系列

$$(*)\quad 0 \to f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega^1_{X/Y} \xrightarrow{d} \Omega^2_{X/Y} \xrightarrow{d} \cdots\cdots \xrightarrow{d} \Omega^m_{X/Y} \to 0$$

が $Y = \{一点\}$ のときと同様に完全であることは簡単にわかる。よって，相対 Hodge スペクトル系列

$$E_1^{p,q} = R^q f_* \Omega^p_{X/Y}$$

は $R^{p+q} f_* f^{-1}\mathcal{O}_Y$ に収束して，X が Kähler であることから，E_1 で退化する。各点ごとに見れば，これはファイバーの Hodge 分解に他ならない。また Poincaré 系列 (*) の各写像が $\mathcal{O}_Y$ について線型であることから，上で与えられる $R^{p+q} f_* f^{-1}\mathcal{O}_Y$ のフィルターづけは Y によって正則にパラメトライズされている。たとえば，最も簡単な例として，$R^1 f_* f^{-1}\mathcal{O}_Y$ を考えると，

$$0 \to f_*\Omega^1_{X/Y} \to R^1 f_* f^{-1}\mathcal{O}_Y \to R^1 f_* \mathcal{O}_X \to 0$$

は完全系列であり，しかも $\mathcal{O}_Y$-linear である。いいかえれば，スペクトル系列 $E_1^{p,q} = R^q f_* \Omega^p_{X/Y}$

$\Longrightarrow$ $R^{p+q} f_* f^{-1} \mathcal{O}_Y$ は Hodge 構造の変動（variation of Hodge structure）である。

一般の場合にもどって，f が smooth でないときに同様のことを考えようとすると，種々の難点が生じる。Y の Zariski 開集合 Y^0 上で f が smooth であるとして，$X^0 = f^{-1}(Y^0)$ とおこう。$R^i f_* f^{-1} \mathcal{O}_{Y^0}$ は Y^0 上の連接層であって $R^i f_* \mathbb{C}_X|_{Y^0}$ を含んでいる。これを Y 上の連接層にまで延長することは Schmid により可能であるが，それでもその延長 $\mathcal{H}^i$ と $R^i f_* \mathbb{C}_X$ との包含関係とか，$\mathcal{H}^i$ の大域的性質とかは具体的にはよくわからない。$R^i f_* f^{-1} \mathcal{O}_Y$ は $\mathcal{O}_Y$-加群であるが，一般に連接層にならないため，このような困難が生じるのである。

本稿では，$\dim Y = 1$，$\dim X = 2$ の場合に $R^i f_* f^{-1} \mathcal{O}_{Y^0}$ の標準的延長 $\mathcal{H}^i$ を構成する。$\mathcal{H}^i$ のもつべき性質として次のようなものが考えられるが，我々の構成はすべてこれを満足する。

(1) $\mathcal{H}^i$ は $R^i f_* \mathbb{C}_X$ を含む。

(2) $\mathcal{H}^1$ は 1)をみたす延長のうちで何らかの意味で(局所的に)極小である。

(3) $\mathcal{H}^1$ を Y^0 に制限したものは $R^1 f_* f^{-1}\mathcal{O}_Y$ と自然な意味で同型である。

なお，(2,1)-ファイバー空間では，本質的に問題となるのは $\mathcal{H}=\mathcal{H}^1$ のみである。実際，

$$\begin{cases} \mathcal{H}^0 = \mathcal{O}_Y, \\ \mathcal{H}^2/\mathcal{H}^2_{tor} = \mathcal{O}_Y, \\ \mathcal{H}^2_{tor,p} = (\mathcal{O}_{Y,p}/\mathfrak{m}_p)^{n_p} \end{cases}$$

とおけばよい。ここで，p 上のファイバーの既約成分の数を n_p とおいた。

§2. $\mathcal{H}=\mathcal{H}^1$ の構成

以下の構成のため，ここで (2,1)-ファイバー空間 $f: X \longrightarrow Y$ に対して次の条件を設定する。

条件　任意の特異ファイバーは，その reduced structure をとれば，非特異曲線の正規交叉 (normal crossing) である。

適当にXに二次変換をほどこせば，上記の条件はみたされ，しかも$R^1f_*\mathbb{C}_X$，$f_*f^{-1}\mathcal{O}_Y|Y^0$は影響をうけないから，決して不自然な設定ではない。

以下繁雑になるが，記号を定めておこう。

S：fの特異ファイバーをreducedな部分解析集合とみて，その和集合.

$s = f(S)$.

T：Sの特異点全体からなる有限集合.

Δ_k：Tの点P_kの十分小さい近傍.

(t_k, v_k)：Δ_kの座標で，fが$f(t_k, v_k) = t_k^{\alpha} v_k^{\beta}$の形で定義されるもの。

$\Delta = \cup \Delta_k$

$\mathcal{E}_X^{\Delta}$：Δの外では恒等的に0となるようなX上のC^∞函数の芽の層.

$\mathcal{E}_X$：X上のC^∞函数の芽の層.

$\mathcal{E}_X^{p,q}$：X上の(p,q)-型式の層.

$\Omega_X^1(\log S)$：Sに沿って極をもつ対数1-型式の層.

$\Omega^1_Y(\log s) = \mathcal{O}_Y(K_Y + (s))$

$\Omega^1_{X/Y}(\log S) = \Omega^1_X(\log S)/f^*\Omega^1_Y(\log s)$

$\mathcal{E}^{1,0}_{X/Y}(\log S) = \mathcal{E}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_{X/Y}(\log S)$

$\mathcal{I}_S, \mathcal{I}_T$: reduced な閉部分集合 S, T の $\mathcal{O}_X$ における ideal.

ここで留意すべきは，$\Omega^1_{X/Y}(\log S)$ は局所自由（したがって可逆）層となることである。Δ_k 上では，dt_k/t_k がその一つの底となる。

さて構成にはいろう。

$$\delta^\Delta : \mathcal{E}_X \oplus \mathcal{I}_S\mathcal{E}^\Delta_X \longrightarrow \mathcal{I}_T\mathcal{E}^{1,0}_{X/Y}(\log S) \oplus \mathcal{E}^{0,1}_X \oplus \mathcal{I}_S\mathcal{E}^{0,1}_X$$

を次のように定義する。$(\zeta, \xi) \in \mathcal{E}_X \oplus \mathcal{I}_S\mathcal{E}^\Delta_X$ に対し，Δ_k 上では，

$$\delta^\Delta(\zeta, \xi) = \left(\left[\partial\zeta + \xi\frac{dt_k}{t_k}\right], \bar\partial\zeta, \bar\partial\xi\right)$$

とし，$X - \Delta$ 上では，

$$\delta^\Delta(\zeta, \xi) = ([\partial\zeta], \bar\partial\zeta, 0)$$

とおくのである。ξ は $X-\Delta$ 上 0 だから，この定義はちゃんとした意味をもつ。ここで，

[ ] は modulo $f^*\Omega^1_Y(\log S)$ での同値類を表わす。こう δ^Δ を定義しておくと，次の補題は極めて容易に示すことができる。

<u>補題</u> 1. δ^Δ は $\mathcal{O}_Y$ に関して線型である。また以下の図式は $\mathcal{O}_Y$ 加群の間の準同型として可換である。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_X \oplus \mathcal{E}_X^{\Delta} \arrow[r, "\delta^{\Delta}"] \arrow[d, "\text{1st projection}"] & \mathcal{I}_{\Gamma}\mathcal{E}^{1,0}_{X/Y}(\log S) \oplus \mathcal{E}^{0,1}_X \oplus \mathcal{I}_S\mathcal{E}^{0,1}_X \arrow[d, "\text{2nd projection}"] \\
\mathcal{E}_X \arrow[r, "\bar\partial"] & \mathcal{E}^{0,1}
\end{tikzcd}$$

$U \subset Y$ を小開集合とし，

$$\mathcal{H}^{\Delta}_U = \Gamma(f^{-1}(U), \mathrm{Im}\,\delta^{\Delta}) / \delta^{\Delta}\,\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{E}_X \oplus \mathcal{E}_X^{\Delta})$$

とおこう。すると，上記補題より，自然な $\Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$-線型写像

$$\gamma^{\Delta}_U : \mathcal{H}^{\Delta}_U \longrightarrow \Gamma(f^{-1}(U), \bar\partial\mathcal{E}_X) / \bar\partial\,\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{E}_X)$$

$\cong H^1(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X) \cong \Gamma(U, R^1 f_* \mathcal{O}_X)$

が得られる。次の補題で γ_U^Δ の構造はある程度わかる。

補題 2. $U \subset Y$ を小さな開集合とし、U の境界 ∂U は s を通らないものと仮定する。このとき、Δ を U に対して十分小さくとれば、$\mathrm{Ker}\,\gamma_U^\Delta$ は $\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{I}_T\Omega^1_{X/Y}(\log S))$ と同型である。

証明は以下の二部分にわけて行う。

a) $\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{I}_T\Omega^1_{X/Y}(\log S))$ は自然に $\mathrm{Ker}\,\gamma_U^\Delta$ に入る。

b) $\mathrm{Ker}\,\gamma_U^\Delta$ は $\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{I}_T\Omega^1_{X/Y}(\log S))$ に含まれる。

a) の証明　第一段. $\mathcal{I}_T\Omega^1_{X/Y}(\log S) \subset \mathrm{Im}\,\delta^\Delta$.

$X-\Delta$ 上では適当な局所座標 (t, v) に対して、$f(t, v) = v^\alpha$ の形となる。$\mathcal{I}_T\Omega^1_{X/Y}(\log S)$ の底として dt をとると、任意の函数 $\xi(t, v)$ に対して、$\frac{\partial \eta}{dt} = \xi$ となる関数があるから、

$\delta^\Delta(\eta, 0) = [\xi\, dt]$ となる。次に Δ_k 上で考える。

$\xi(dt_k/t_k)$ に対して，ξ を巾級数展開する。

$$\xi(t_k, v_k) = \sum \xi_{ij}\, t_k^i v_k^j$$

$(\eta, t_k v_k \zeta) \in \mathcal{O}_\Delta \oplus \mathcal{J}_S \mathcal{O}_\Delta$ に対して δ^Δ を施すと，

$$\left[\frac{\partial\eta}{\partial t_k} dt_k + \frac{\partial\eta}{\partial v_k} dv_k + t_k^i v_k^j \zeta \frac{dt_k}{t_k}\right]$$

を得る。ここで $\left[\dfrac{d(t_k^\alpha v_k^\beta)}{t_k^\alpha v_k^\beta}\right] = \left[\alpha \dfrac{dt_k}{t_k} + \beta \dfrac{dv_k}{v_k}\right]$ $= 0$ に注意すると，

$$\delta^\Delta(\eta, t_k^\alpha v_k^\beta \zeta)$$
$$= \frac{1}{\beta}\left[\left(\beta t_k \frac{\partial\eta}{\partial t_k} - \alpha v_k \frac{\partial\eta}{\partial v_k} + \beta t_k v_k \zeta\right)\frac{dt_k}{t_k}\right]$$

を得る。$\eta = \sum \eta_{ij}\, t_k^i v_k^j$，$\zeta = \sum \zeta_{ij}\, t_k^i v_k^j$ と巾級数展開すると，連立方程式

$$\xi_{ij} = (\beta i - \alpha j)\,\eta_{ij} + \beta\,\zeta_{i-1,j-1}$$

を解けばよいことになる。そこで，たとえば

$$\begin{cases} \eta = \zeta_{00} + \dfrac{1}{\beta}\xi_{1,0} t_k - \dfrac{1}{\alpha}\xi_{0,1} v_k, \\ \zeta = \dfrac{1}{\beta} \sum \xi_{i+1,j+1}\, t_k^i v_k^j \end{cases}$$

とおけば，η，ζ は Δ 上の正則函数で，

$$\delta^\Delta(\eta, t_k v_k \zeta) = \left[\xi \frac{dt_k}{t_k}\right]$$ となる。

いずれにしても $\mathcal{I}_T\Omega^1_{X/Y}(\log S) \subset \mathrm{Im}\,\delta^\Delta$ が言えた。

第二段、 $\delta^\Delta\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{E}_X \oplus \mathcal{I}_S\mathcal{E}_X^\Delta) \cap \mathcal{I}_T\Omega^1_{X/Y}(\log S)) = (0)$. 実際, $\delta^\Delta(\eta, \zeta)$ が有理型 1-型式なら, η, ζ はともに正則である。f は固有だから, η, ζ は f の fibre に沿っては定数でなければならない。また ζ は十分小さい開集合 Δ の外では 0 だから, ζ は至るところ 0、すなわち $\delta^\Delta(\eta, \zeta) = ([\partial\eta], 0, 0) = 0$ となる。

$(\because\ \partial\eta \in \Gamma(f^{-1}(U), df^{-1}\mathcal{O}_Y))$

b) の証明も同様であるから略する。

さて, 微分 $d: \mathcal{O}_X \to \mathcal{I}_T\Omega^1_{X/Y}(\log S)$ から誘導される $\Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$-準同型

$$\Phi_U : H^1(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X) \to H^1(f^{-1}(U), \mathcal{I}_T\Omega^1_{X/Y}(\log S))$$

を考えると, 簡単に次のことがわかる。

<u>補題 3</u> $\mathrm{Im}\,\gamma_U^\Delta$ は $\mathrm{Ker}\,\Phi_U$ を含む。

$H^1(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X)/\mathrm{Ker}\,\Phi_U$ が有限次元（Δ にも U にもよらない数でおさえられる）ことはすぐわかるから，

系　$\mathrm{Im}\,\gamma_U^\Delta$ は十分 Δ を小さくとっておけば，Δ によらず定まる。

が成立する。特に U が補題2の条件をみたすとき，完全系列

$$0 \to \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{I}_T\Omega^1_{X/Y}(\log S)) \to \mathcal{H}_U^\Delta \to \mathrm{Im}\,\gamma_U^\Delta \to 0$$

の左右は Δ によらないから，$\mathcal{H}_U^\Delta$ も Δ によらず定まる。したがって $\mathcal{H}_U = \varinjlim_{\Delta} \mathcal{H}_U^\Delta$ は，well-defined である。U に関する条件は，presheaf $\mathcal{H}_U$ のかわりに層化した $\mathcal{H}$ を考えれば省くことができる。よって次の定理が証明された。

定理1.　一般のファイバーの種数を g としたとき，$\mathcal{H}$ は階数 $2g$ の局所自由層であり，

$$0 \to f_*\mathcal{I}_T\Omega^1_{X/Y}(\log S) \to \mathcal{H} \to R^1f_*\mathcal{O}_X$$

は$\mathcal{O}_Y$-加群の完全系列である。$\mathcal{H}|_{Y^0}$ は自然に $R^1f_*f^{-1}\mathcal{O}_Y|_{Y^0}$ と一致する。ここに、Y^0は、$f|_{Y^0}$ が smooth であるようなYの Zariski 開集合。

さて、可換な図式

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
\mathcal{E}_X \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\text{第1成分への自然な写像}"'] & \mathcal{E}_X^{1,0} \oplus \mathcal{E}_X^{0,1} \arrow[d, "\text{第1成分を第1成分に 第2成分を第2成分に 自然に写す}"] \\
\mathcal{E}_X \oplus \mathcal{I}_S \mathcal{E}_X^{\Delta} \arrow[r, "\gamma^{\Delta}"] & \mathcal{I}_T \mathcal{E}^{1,0}_{X/Y}(\log S) \oplus \mathcal{E}_X^{0,1} \oplus \mathcal{I}_S \mathcal{E}_X^{0,1}
\end{tikzcd}$$

を考えると、Yの小さな開集合Uに対して

$$\Gamma(U, R^1f_*\mathbb{C}_X) = \Gamma(f^{-1}(U), d\mathcal{E}_X)/d\,\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{E}_X) \longrightarrow \mathcal{H}^{\Delta}_U$$

が自然にできる。よって層準同型

$$i : R^1f_*\mathbb{C}_X \longrightarrow \mathcal{H}$$

が誘導されるが、これに対しては、次の定理が示される。

<u>定理2</u> iによって $R^1f_*\mathbb{C}_X$ は$\mathcal{H}$の部分層と

みなすことができる。

以上2つの定理から，上記の$\mathcal{H}$が我々の要請のうち(1)(3)を満足することが確認された。さらに，すべての特異ファイバーがreducedであるという条件をつけ加えると要請の(2)もみたすのである。すなわち，

<u>命題</u>　(2.1)－ファイバー空間$f: X \longrightarrow Y$のすべてのファイバーはreducedかつ正規交叉であると仮定すると，任意の$p \in Y$に対して，

$$H^0(f^{-1}(p), \mathcal{H}) \cong H^1(f^{-1}(p), \mathbb{C}).$$

また，同じ仮定のもとで，

$$0 \to f_* \mathcal{I}_T \Omega^1_{X/Y}(\log S) \to \mathcal{H} \longrightarrow R^1 f_* \Theta_X \longrightarrow 0$$

は完全系列であり，同型

$$\Omega^1_X / f^* \Omega^1_Y \cong \mathcal{I}_T \Omega^1_{X/Y}(\log S)$$

が成立する。

§3. 結語

以上，(2,1)-ファイバー空間 $f: X \longrightarrow Y$ に対して $R^1 f_* \mathbb{C}_X$ の標準的延長 $\mathcal{H}$ を構成したわけであるが，このようなことを考えた動機に触れてみよう。

M を射影的曲面とし，その余接束 Ω_M^1 が ample であると仮定する。Ω_M^1 が ample なのだから，何らかの<u>単純な</u>方法で，M の有限次の分岐被覆 $\tilde{M}$ を構成し，$\Omega_{\tilde{M}}^1$ が大域的切断をもつようにできるのではないかと考えられる。しかし一般にベクトル束が ample だからといって上のような $\tilde{M}$ を作るのは困難である（直線束のようにはいかない）。一般のベクトル束の場合はだめでも，Ω^1 には Hodge 理論があるから，<u>適当</u>な形に Hodge 理論を言い換えることによって $\tilde{M}$ を求めたいのである。

さて，M の一般な Lefschetz pencil Π をとることによって，M の blowing up M_Π' は $\mathbb{P}^1$ 上のファイバー空間となる。Lefschetz pencil の切断面に生ずる有限個の通常二重点を更に

blow up して M_π を得る。$r: M_\pi \longrightarrow M'_\pi$, $f_\pi: M'_\pi \longrightarrow \mathbb{P}^1$ を自然な写像とすると，完全系列

$$0 \to r^* f_\pi^* \Omega^1_{\mathbb{P}^1}(E) \to r^*\Omega_{M'_\pi}$$
$$\to r^*(\mathcal{J}_T\Omega^1_{M'_\pi/\mathbb{P}^1}(\log S)) \longrightarrow 0$$

が自然に定義され，Ω^1_M が（$\Omega^1_{M'_\pi}$ ではない）ample なら $r^*(\mathcal{J}_T\Omega^1_{M'_\pi/\mathbb{P}^1}(\log S))$ が ample な直線束になるのである。ここに，S，T は (2.1)-ファイバー束 $f_\pi: M'_\pi \longrightarrow \mathbb{P}^1$ に対して §2 の記号を流用した。また E は T の r による逆像（例外曲線の和）である。この直線束 $r^*(\mathcal{J}_T\Omega^1_{M'_\pi/\mathbb{P}^1}(\log S))$ を用いて $\widetilde{M}$ が構成でき，更に次の定理を究極的には示すことができる。

<u>定理</u>: Ω^1_M が ample ならば，$\pi_1(M)$ は無限群。